


**VISIÓN**  
DE CASO

## Acerca de la homogeneización y propiedades efectivas de la ecuación del calor

On homogenization and effective properties of the heat equation

**Julián Bravo\***

**Raúl Guinovart\*\***

**Gabriela López\*\*\***

**Reinaldo Rodríguez\*\*\*\***

**Federico J. Sabina\*\*\*\*\***

Fecha de envío: noviembre de 2012

Fecha de recepción: noviembre de 2012

Fecha de aceptación: enero de 2013

### Resumen

Este es un trabajo de divulgación científica, dedicado a recorrer el problema de la conductividad térmica efectiva de un material heterogéneo bifásico tipo matriz-inclusión con microestructura periódica. El material compuesto es macroscópicamente isótropo y presenta contacto perfecto en las fases. El problema se estudia en el contexto de la homogeneización periódica. Las propiedades efectivas se determinan como resultado del Método de Homogeneización Asintótica (MHA). Se utilizan conocidas herramientas de la teoría de variable compleja para la resolución del problema sobre la celda periódica. Se presentan los casos límites.

### Palabras clave

Compuesto periódico, homogeneización asintótica, propiedades efectivas, contacto perfecto.

### Abstract

This is a work of scientific circulation intended to introduce the homogenization process from the heat equation. An example is studied for a medium made of two conducting materials, matrix and fibers. The fibers are periodically distributed and embedded within the matrix.

The composite is isotropic on the macroscopic scale and perfect inter-facial contact conditions are considered. The problem is studied in the context of periodic homogenization. The effective conductivity tensor is calculated as a result of the application of the asymptotic homogenization method. The solution of the problem on the periodic cell is based on well-known tools of Complex Variable Theory. Some limit cases are also presented.

\* Licenciado en Educación Matemática Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, Cuba; licenciado en Matemática, maestro y doctor en Ciencias Matemáticas Universidad de La Habana, profesor e investigador titular de la Facultad de Matemática y Computación de la misma universidad. [jbravo@matcom.uh.cu](mailto:jbravo@matcom.uh.cu)

\*\* Licenciado en Educación Matemática Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana, Cuba; maestro y doctor en Ciencias Matemáticas Universidad de La Habana; profesor titular de la Facultad de Matemática y Computación de la misma universidad. [guino@matcom.uh.cu](mailto:guino@matcom.uh.cu)

\*\*\* Licenciada en Matemática Universidad de La Habana, Cuba; profesora del colectivo de matemática en el Departamento de Macro-Microeconomía de la Facultad de Economía de la misma universidad. [gabriela@fec.uh.cu](mailto:gabriela@fec.uh.cu)

### Key words

Periodic composites, asymptotic homogenization, effective properties, perfect contact.

### Introducción

Un material compuesto consta de dos o más materiales homogéneos con diferentes propiedades físicas y geométricas que se encuentran indisolublemente unidos. La clasificación de los materiales compuestos puede ser representada por medios laminados (formados por láminas delgadas homogéneas alternadas); compuestos reforzados por fibras, por ejemplo, un sistema periódico de fibras unidireccionales empotradas en un aglutinante llamado matriz) y compuestos granulares (i.e., formados por inclusiones esféricas distribuidas en una matriz polimérica).

La determinación de las propiedades globales o efectivas de materiales compuestos mediante métodos matemáticos, es una guía necesaria para orientar a los investigadores experimentales en la búsqueda de nuevos materiales con las propiedades óptimas deseadas. El modelo matemático para la investigación de medios heterogéneos provistos de una estructura periódica está dado por sistemas de ecuaciones diferenciales con coeficientes periódicos y rápidamente oscilantes. El campo matemático que permite encontrar con un alto grado de exactitud las propiedades efectivas del compuesto a partir de las propiedades físicas y geométricas de sus componentes es llamado homogeneización.

En particular, la homogeneización asintótica se basa en la búsqueda de la solución del problema original en forma de un desarrollo asintótico a doble escala en la forma de series de potencias con respecto a un parámetro pequeño, que representa el cociente en-

tre una característica geométrica de la celda periódica por una longitud representativa de todo el compuesto. Las escalas involucradas en dicho desarrollo asintótico contienen, respectivamente, información de la microestructura y de la macroestructura del medio heterogéneo que se investiga. Este método nos permite transformar el problema original, en el cual aparecen coeficientes variables y rápidamente oscilantes sobre un medio heterogéneo y anisótropo, en otro más simple, en el que los coeficientes son constantes sobre un medio homogéneo, siendo los coeficientes constantes que caracterizan al nuevo problema (o problema homogeneizado) los llamados coeficientes efectivos.

El MHA constituye una técnica efectiva para la investigación, tanto de las propiedades macroscópicas como microscópicas, de las estructuras periódicas. Tiene un carácter universal por ser aplicable a todo tipo de proceso que pueda desarrollarse en medios periódicos, tales como elásticos, termoelásticos, piezoeléctricos y otros. La convergencia de la solución del problema original a la del problema homogeneizado cuando el parámetro geométrico tiende hacia cero se encuentra rigurosamente demostrada en los trabajos de diferentes autores, así como cada uno de los teoremas que se utilizan para verificar la solubilidad de los problemas en los pasos del algoritmo hacia la construcción de una solución asintótica, véase [1]-[4].

Este texto ilustra mediante el ejemplo de un compuesto fibroso bifásico con propiedades conductivas isótropas y contacto perfecto entre las fases, la utilización del MHA para la determinación de las propiedades efectivas. Primero, se plantea la formulación general del problema de conductividad, luego se desarrolla la aplicación del método y, por último,

\*\*\*\* Licenciado en Educación Matemática Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona, La Habana; doctor en Ciencias Físico-Matemáticas Universidad Estatal de Moscú; profesor e investigador titular de la Facultad de Matemática y Computación de la Universidad de La Habana. reinaldo@matcom.uh.cu

\*\*\*\*\* Licenciado en Física Universidad Nacional Autónoma de México, Doctorado en Cambridge University, Inglaterra. Investigador titular C del Departamento de Matemática y Mecánica, Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas de la Universidad Nacional Autónoma de México. fjs@mym.iimas.unam.mx

se analiza el caso isótropo. El artículo es de divulgación del MHA para introducir a los interesados en las ideas básicas de este método.

## 1. Formulación del problema

Sea un material compuesto bifásico periódico tipo matriz-inclusión que ocupa el dominio  $\Omega$  de  $\mathbf{R}^s$ , acotado y con contorno  $\partial\Omega$  infinitamente suave. Se denotan las regiones ocupadas por la matriz y las inclusiones como  $M$  y  $F$ , respectivamente.

El problema de la conducción térmica en el medio antes descrito puede expresarse matemáticamente como:

$$-\frac{\partial}{\partial x_k} \left( A_{kj}(y) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = f(x), \quad x \in \Omega \quad (1)$$

y la condición de frontera:

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (2)$$

En este caso, la función  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$  representa la densidad de las fuentes de calor y  $u$ , la temperatura, mientras que  $A_{kj}(y) \in \mathbf{R}$  ( $k, j = 1, 2, \dots$ ) son los coeficientes de la matriz que define el tensor de conductividad térmica en cada punto  $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ . Supongamos que las componentes  $A_{kj}(y)$  son funciones 1-periódicas respecto a la variable rápida,  $A_{kj}(y) \in C^\infty(\mathbf{R}^s)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_s)$ , e infinitamente diferenciables excepto sobre las superficies suaves  $\Gamma$ , de manera que las funciones  $A_{kj}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$  son  $\varepsilon$ -periódicas en  $x$ , siendo  $\varepsilon = \frac{l}{L}$  un parámetro geométrico pequeño que representa el cociente entre longitudes características de la celda periódica  $l$  y de todo el compuesto  $\Omega$ .

Las superficies  $\Gamma$  no se interceptan y solo un número finito tiene intersección con el cubo unitario. Sobre cada una de ellas los coeficientes  $A_{kj}(y)$  y todas sus derivadas pueden tener discontinuidades de primer orden. Se considera el convenio de suma respecto a los índices repetidos desde 1 hasta la dimensión  $s$  del espacio. Los coeficientes del tensor de conductividad satisfacen las siguientes condiciones de positividad y simetría:

$$\begin{aligned} A_{kj}(y) &= A_{jk}(y), \\ \exists c > 0 \quad \forall \xi = (\xi_1, \dots, \xi_s) \\ \in \mathbf{R}^s : A_{kj}(y) \xi_k \xi_j &\geq c \xi_k \xi_k, \end{aligned} \quad (3)$$

Siendo la constante positiva  $c$  independiente de  $\varepsilon$  y de  $y$ . En un sentido clásico, el problema, en este caso, consiste en encontrar  $u$  que satisface la ecuación (1) en aquellas regiones que no tienen contacto con las superficies de discontinuidad  $\Gamma$ , satisface la condición de contorno (2) y sobre  $\Gamma$  deben ser satisfechas las siguientes condiciones de contacto perfecto:

$$[u] = 0, \quad (4)$$

$$\left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0, \quad (5)$$

Donde  $\partial u / \partial n$  denota la derivada  $\frac{\partial u}{\partial n} = \sum_{k,j=1}^s A_{kj} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_k$ , y el corchete denota el salto de la función en la transición sobre la interface  $\Gamma$ .

## 2. Aplicación del MHA

Se propone la solución de (1)-(2) en la forma:

$$\begin{aligned} u^\varepsilon &\approx u^{(2)}(x, \varepsilon) = u_0(x, y) + \\ &\varepsilon u_1(x, y) + \varepsilon^2 u_2(x, y), \end{aligned} \quad (6)$$

Donde  $u_i(x, y)$  son funciones 1-periódicas respecto a la segunda coordenada, e infinitamente diferenciables.

Sustituyendo (4) en el miembro izquierdo de (1), aplicando la regla de la cadena

$$\frac{d}{dx_k} F(x, y) = \frac{\partial}{\partial x_k} F(x, y) + \varepsilon^{-1} \frac{\partial}{\partial y_k} F(x, y), \quad (7)$$

e introduciendo la notación  $L_{pq}u(x, y) \equiv$

$$\sum_{k,j=1}^s \frac{\partial}{\partial p_k} \left( A_{kj}(y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial q_j} \right) \text{ resulta}$$

$$\varepsilon^{-2} (L_{yy}u_0) + \varepsilon^{-1} (L_{yy}u_1 + L_{yx}u_0 + L_{xy}u_0) + \varepsilon^0 (L_{yy}u_2 + L_{yx}u_1 + L_{xy}u_1 + L_{xx}u_0 - f) + \dots \quad (8)$$

Igualando a cero los términos de orden  $\varepsilon^{-2}, \varepsilon^{-1}, \varepsilon^0$  de manera que la ecuación (1) será satisfecha por  $u^{(2)}$  hasta términos del orden  $\varepsilon$  (donde los restantes términos de orden  $\varepsilon$  y  $\varepsilon^2$  involucran la discrepancia), se obtienen las ecuaciones que definen a las funciones  $u_i(x, y)$  ( $i = 0, 1, 2$ ), cuya solución es única salvo una constante, véase [1].

$$L_{yy}u_0 = 0, \quad (9)$$

$$L_{yy}u_1 = -L_{yx}u_0 - L_{xy}u_0, \quad (10)$$

$$L_{yy}u_2 = -L_{yx}u_1 - L_{xy}u_1 - L_{xx}u_0 + f, \quad (11)$$

Donde  $x$  y  $\xi$  son consideradas como variables independientes. Procediendo de forma análoga en las condiciones de contorno y de frontera, se logra una familia recurrente de ecuaciones diferenciales parciales, obteniéndose

finalmente que  $u_i(x, \xi) = N_i(\xi) \frac{\partial v_0(x)}{\partial x_{i_1}}$ , donde  $v_0$  es la solución de la ecuación homogeneizada  $\hat{A}_{ij} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x_i \partial x_j} = f(x)$ , y  $\hat{A}_{ij} = \left\langle A_{ij}(y) \frac{\partial N_j(y)}{\partial \xi_k} + A_{ij}(y) \right\rangle = \left\langle A_{ik}(y) \frac{\partial M_j(y)}{\partial y_k} \right\rangle$  para  $M_i \equiv N_i + \xi_i$ , representa los coeficientes efectivos, mientras que  $\langle \cdot \rangle$  es el operador de promediación de una cierta función, el cual se define como  $\langle f \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y f(x) dx$ , siendo  $|Y|$  la medida de  $Y$  que en este caso es la unidad.

Por otra parte,  $N_i(\xi)(i_1 = 1, \dots, s)$  es una solución 1-periódica del problema sobre la celda periódica:

$$L_{\xi} (N_{i_1} + \xi_{i_1}) = 0, \quad \xi \notin \Sigma_l, \quad (12)$$

$$[N_{i_1}]_{\xi \in \Sigma_l} = 0, \quad (13)$$

$$\left[ \frac{\partial (N_{i_1} + i_1)}{\partial n} \right]_{\xi \in \Sigma_l} = 0, \quad (14)$$

$$\langle N_{i_1} \rangle = 0. \quad (15)$$

Se demuestra, por ejemplo, la proximidad  $\|u - v_0\|_{C(\bar{\Omega})} = O(\varepsilon)$  donde  $u$  es la solución del problema original (1)-(2) y  $v_0$  es la solución del problema promediado con la condición de frontera  $v_0(x) = 0, x \in \partial\Omega$ . Además, es importante destacar la conservación de las propiedades de simetría y positividad de los coeficientes efectivos, (las demostraciones aparecen en capítulo 4 de [1]).

## 2.1 Compuestos fibrosos, caso isótropo

Se estudia el comportamiento global de un material compuesto bifásico formado por fibras cilíndricas unidireccionales homogéneas e isótropas, de sección transversal circular, que se encuentran periódicamente distribuidas en un medio isótropo (matriz) del espacio  $Ox_1x_2x_3$ , de manera que los ejes de simetría de las fibras tienen la misma dirección del eje  $Ox_3$ . Este caso corresponde a un problema de homogeneización bidimensional y podemos seleccionar como celda periódica para el planteamiento de los problemas locales a la representada en la figura 1, donde M y F representan matriz y fibra denotadas por  $Y_1$  y  $Y_2$ , respectivamente. La interfaz límite se corresponde con la circunferencia  $\Gamma: y_1^2 + y_2^2 = r^2$  donde  $r$  es el radio del círculo F.

En virtud de la isotropía de cada una de las fases podemos escribir el tensor de conductividad térmica como  $A_{kj}(y) = \sigma(y)\delta_{kj} = \begin{cases} \sigma_1\delta_{kj}, & y \in Y_1, \\ \sigma_2\delta_{kj}, & y \in Y_2, \end{cases}$  siendo  $\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0, & k \neq j, \end{cases}$  la delta de Kronecker.

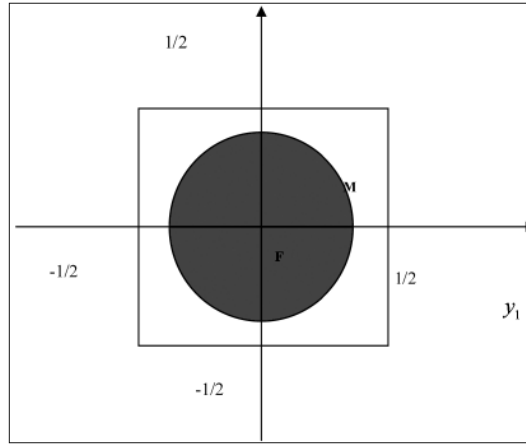
De las ecuaciones y condiciones (1)-(2) resultan los problemas locales  $_{i_2}L(i_2 = 1, 2)$  definidos por las ecuaciones de Laplace en cada una de las regiones  $Y_\gamma$  ( $\gamma = 1, 2$ ):

$$\Delta N_{i_2}^{(\gamma)}(y) \equiv \frac{\partial^2 N_{i_2}^{(\gamma)}(y)}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 N_{i_2}^{(\gamma)}(y)}{\partial y_2^2} = 0, \quad y = (y_1, y_2) \in Y_\gamma \quad (\gamma = 1, 2), \quad (16)$$

y por las condiciones de contacto perfecto sobre la circunferencia  $\Gamma$ :

$$[N_{i_2}(y)] = 0, \quad (17)$$

Figura 1. Celda Periódica



Fuente: elaboración propia.

$$\left[ \sigma(y) \frac{\partial N_{i_2}(y)}{\partial y_k} n_k \right] = -[\sigma(y)] n_{i_2}, \quad (18)$$

donde  $[f(y)] = f_1(y) - f_2(y)$ .

La solución de los problemas locales (16)-(18) es necesaria para la determinación de los coeficientes efectivos  $\hat{A}_{i_2}$ , escrita ahora como sigue:

$$\hat{A}_{i_2} = \langle A_{i_2}(y) \rangle + \left\langle A_{ki_2}(y) \frac{\partial N_{i_2}}{\partial y_k} \right\rangle. \quad (19)$$

La metodología para la solución del problema correspondiente a  $i_2 = 1$  aplicando herramientas de la teoría de las funciones de variable compleja  $z = y_1 + iy_2$ , propone la solución de (16)-(18) en la forma:

$$N_1^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ a_1 [\zeta(z) - \pi z] + \sum_{k=3}^{\infty} {}^o a_k \frac{\zeta^{(k-1)}(z)}{(k-1)!} \right\}, \quad (20)$$

$$N_1^{(2)}(z) = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} {}^o c_k z^k \right\}, \quad (21)$$

Donde  $\zeta(z)$  y  $\zeta^{(k)}(z)$  la función Zeta de Weierstrass y sus  $k$ -ésimas derivadas de períodos  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = i$ , que satisfacen las relaciones  $\zeta(z+1) - \zeta(z) = \pi$ ,  $\zeta(z+i) - \zeta(z) = -i\pi$ , y de periodicidad  $\zeta^{(k)}(z + w_p) - \zeta^{(k)}(z) = 0$ , ( $p = 1, 2$ ) para ( $k \geq 1$ ), ver [5]. Para la aplicación a placas perforadas y resultados relativos al trabajo con estas funciones elípticas se recomienda, además, ver [6].

Las funciones definidas por (20) y (21) son funciones analíticas en  $Y_1$  y  $Y_2$ , respectivamente, cuyas partes real e imaginaria son funciones armónicas, es decir, satisfacen la ecuación de Laplace. Esto significa que ambas funciones son soluciones de las ecuaciones (16-18).

El superíndice  $o$  indica la suma  $\sum_{k=k_0}^{\infty} o$  se realiza sobre los números impares  $k$ .

Se puede observar que la función dada por (20) es doblemente periódica con períodos  $\omega_1 = 1$  y  $\omega_2 = i$ , lo cual está en concordancia con la exigencia geométrica de encontrar la solución de (16)-(18) en esta clase de funciones.

Los coeficientes  $a_k$  y  $c_k$  son constantes reales por determinar que se obtienen de evaluar (20) y (21) en las condiciones de contacto (17) y (18) sobre la circunferencia  $\Gamma$ . Pero antes es conveniente desarrollar a  $N_1^{(1)}(z)$  en serie de Laurent alrededor del origen.

La función  $N_1^{(1)}(z)$  tiene el siguiente desarrollo de Laurent alrededor del punto  $z = 0$ :

$$N_1^{(1)}(z) = \text{Re} \left\{ -\pi a_1 z + \sum_{l=1}^{\infty} o a_l z^{-l} + \sum_{k=1}^{\infty} o a_k \sum_{l=1}^{\infty} o \eta_{kl} z^l \right\}, \quad (22)$$

Donde  $\eta_{kl} \neq \eta_k$  y está definida por  $\eta_{kl} = -C_{k+l-1}^l S_{k+l}$  donde  $C_k^l = k! / l!(k-l)!$  y  $S_{k+l} =$

$\sum_{m,n} 1/(m+in)^{k+l}$  es la suma de una serie convergente para  $k+l > 2$ , ver [5]. La prima sobre  $\Sigma$  indica que la suma doble se realiza sobre todos los números enteros excepto para  $m = n = 0$ .

De la sustitución de (20) y (21) en la condición de contacto (18) resulta la siguiente relación de dependencia entre los coeficientes indeterminados  $a_k$  y  $c_k$ :

$$c_p = \frac{a_p}{r^{2p}} + \sum_{k=1}^{\infty} o a_k \eta_{kp} - a_1 \delta_{1p}, \quad p = 1, 3, \dots (\delta = \pi / \sin \mu, \mu = \pi/2). \quad (23)$$

Procediendo de forma análoga, de la condición (21) resulta la siguiente relación de dependencia entre los coeficientes indeterminados  $a_k$  y  $c_k$ :

$$c_p = \frac{k_1}{k_2} \left[ -\frac{a_p}{r^{2p}} + \sum_{k=1}^{\infty} o a_k \eta_{kp} - a_1 \delta_{1p} \right] + \chi^{\delta}_{1p}, \quad p = 1, 3, \dots (\delta = \pi / \sin \mu, \mu = \pi/2). \quad (24)$$

donde  $\chi = \|\sigma\| / (\sigma_1 + \sigma_2)$ .

Luego, combinando (23) y (24) resulta el siguiente sistema de infinitas ecuaciones algebraicas lineales respecto a las  $a_k$ :

$$a_p = \chi r^{2p} \left[ (1 - \pi a_1) \delta_{1p} + \sum_{l=1}^{\infty} o a_l \eta_{lp} \right], \quad p = 1, 3, \dots \quad (25)$$

Para este tipo de sistema, en particular, existe una teoría matemática que permite obtener su solución mediante la reducción a sistemas finitos, es decir, su solución se puede hallar como límite de una sucesión de soluciones de

sistemas finitos de orden  $N$  que se obtienen del sistema infinito original considerando solo las  $N$  primeras ecuaciones con sus correspondientes términos independientes y las  $N$  primeras incógnitas. De igual forma, existe una teoría análoga al método de Cramer para sistemas finitos (ver, por ejemplo, [7]).

A continuación se mostrará que solo el coeficiente  $a_1$ , solución de (25), figura en la fórmula del coeficiente efectivo  $\hat{A}_1$ . Para lo cual se recurre a la expresión (22) para  $i_1 = i_2 = 1$  resultando:

$$\hat{A}_1 = \langle A_{11}(y) \rangle + \left\langle A_{11}(y) \frac{\partial N_1}{\partial y_1} \right\rangle. \quad (26)$$

El segundo término del miembro derecho de (26) puede ser transformado utilizando el Teorema de Green para regiones conexas como sigue:

$$\left\langle A_{11}(y) \frac{\partial N_1}{\partial y_1} \right\rangle = \sigma_1 \oint_{\partial Y} N_1^{(1)}(y) dy_2 - \sigma_1 \oint_{\Gamma} N_1^{(1)}(y) dy_2 + \sigma_2 \oint_{\Gamma} N_1^{(2)}(y) dy_2.$$

La integral  $\oint_{\partial Y} N_1^{(1)}(y) dy_2$  es igual a cero en virtud de las condiciones de periodicidad, o sea,  $N(y)$  toma valores iguales en las caras opuestas de la celda periódica. Además, se cumple que  $\oint_{\Gamma} N_1^{(1)}(y) dy_2 = \oint_{\Gamma} N_1^{(2)}(y) dy_2$  debido a la condición (20). Consecuentemente, resulta:

$$\left\langle A_{11}(y) \frac{\partial N_1}{\partial y_1} \right\rangle = -\|\sigma\| \oint_{\Gamma} N_1^{(1)}(y) dy_2. \quad (27)$$

Puede comprobarse que:

$$\oint_{\Gamma} N_1^{(1)}(y) dy_2 = r \int_0^{2\pi} N_1^{(1)}(re^{i\theta}) \cos \theta d\theta = \frac{2a_1\pi\sigma_1}{\|\sigma\|} - \pi r^2. \quad (8)$$

Usando (27) y (28) se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente efectivo  $\hat{A}_1$ :

$$\hat{A}_1 = \sigma_1 (1 - 2a_1\pi). \quad (29)$$

Es posible obtener una fórmula explícita para el coeficiente  $a_1$  descomponiendo el sistema infinito (25) en tres sistemas semejantes, haciendo  $k=1$ ,  $k=4s-1$  y  $k=4s+1$ , sucesivamente, teniendo en cuenta que  $\eta_k$  se anula cuando  $k+l$  no es de la forma  $4t$ , obteniéndose:

$$(1 + \chi V_2) a_1 = \chi r^2 \left( 1 + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-1} \right), \quad (30)$$

$$a_{4s-1} = \chi r^{2(4s-1)} \left( a_1 \eta_{14s-1} + \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t+1} \eta_{4t+14s-1} \right), \quad (31)$$

$$a_{4s+1} = \chi r^{2(4s+1)} \sum_{t=1}^{\infty} a_{4t-1} \eta_{4t-14s+1}, \quad (32)$$

para  $s=1, 2, 3, \dots$ . De (30)-(32) resulta que:

$$a_1 = \frac{\chi r^2}{1 + \chi c_2 - \chi^2 v_p^T M_p^{-1} \tilde{v}_p}, \quad (33)$$

Donde  $c_2 = \pi r^2$ , el supraíndice  $T$  denota transpuesta, el vector  $v_p(v_s)$ , la matriz  $M_p(m_{ts})$  y el vector  $\tilde{v}_p(\tilde{v}_s)$  tienen orden infinito y sus componentes vienen dadas por:

$$v_s = r^{8s} \eta_{14s-1}, \quad (34)$$

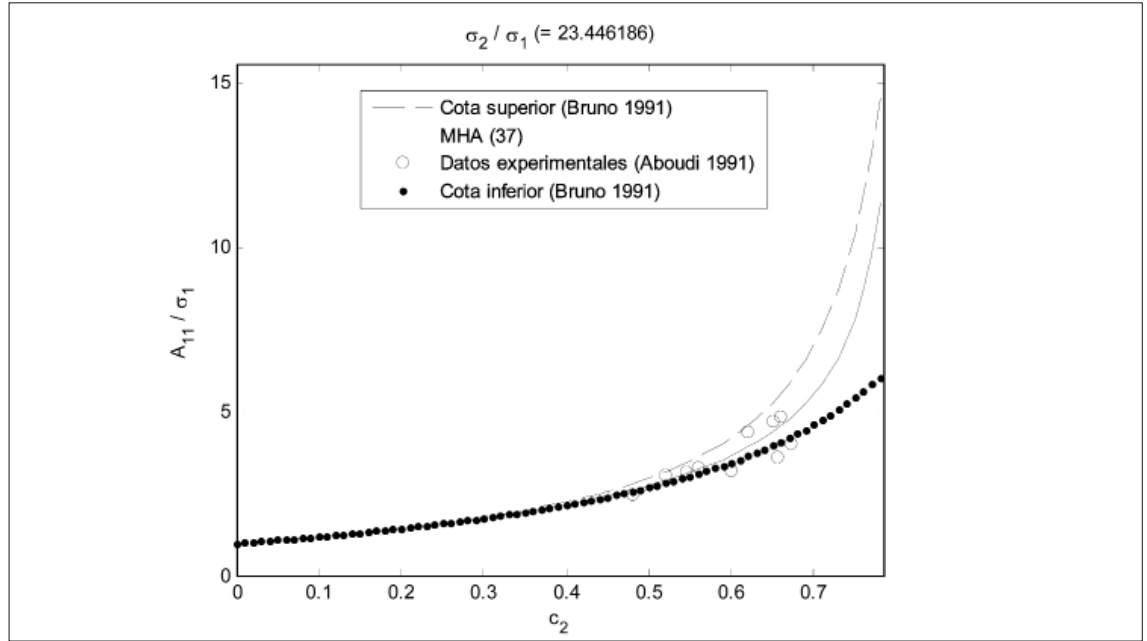
$$m_{ts} = \delta_{4t-14s-1} - \chi^2 r^{8s} \sum_{i=1}^{\infty} r^{8i} \eta_{4t-14i+14s-1}, \quad (35)$$

$$\tilde{v}_s = \eta_{4t-1}, \quad (36)$$

para  $t, s = 1, 2, 3, \dots$

La expresión final para  $\hat{A}_1$  luego de sustituir (33) en (29) está dada por:

**Figura 2. Conductividad efectiva normalizada respecto a la matriz versus el área de las fibras, comparada con las finas cotas de Bruno [8] y datos experimentales reportados en Aboudi [9] para el coeficiente elástico axial**



Fuente: elaboración propia.

$$\hat{A}_{11} = \sigma_1 [1 - 2c_2 \chi K], \quad (37)$$

$$\hat{A}_{11}^\infty = \sigma_1 [1 + 2c_2 K_\infty], \text{ donde } K_\infty = \frac{1}{1 - c_2 - \nu_p^T M_p^{-1} \tilde{\nu}_p}. \quad (40)$$

donde

$$K = \frac{1}{1 + \chi c_2 - \chi^2 \nu_p^T M_p^{-1} \tilde{\nu}_p} = \chi r^2 a_1. \quad (38)$$

Cuando  $r \rightarrow 0$  resulta el caso límite  $\hat{A}_{11} = k_1$ , mientras que cuando  $k_2 \rightarrow 0$  de (37) resulta el caso para el caso de fibras vacías.

$$\hat{A}_{11}^0 = \sigma_1 [1 - 2c_2 K_0], \text{ donde } K_0 = \frac{1}{1 + c_2 - \nu_p^T M_p^{-1} \tilde{\nu}_p}. \quad (39)$$

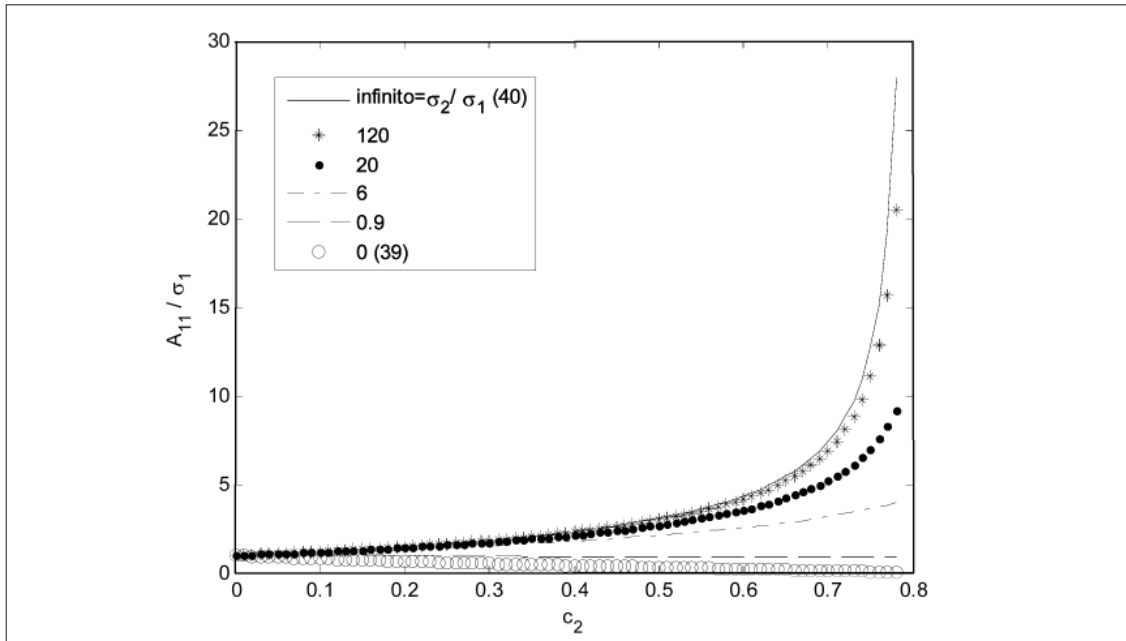
Por otra parte, cuando  $k_2 \rightarrow \infty$  de (37) se obtiene el caso límite correspondiente a fibras súper conductoras:

Las ecuaciones (39) y (40) representan cotas inferior y superior, respectivamente, para el coeficiente de conductividad térmica efectivo  $\hat{A}_{11}$ .

La figura 2 muestra la variación de la propiedad efectiva normalizada  $\sigma / \sigma_1$  versus  $V_2$  para las finas cotas de Bruno [8], datos experimentales tomados de Aboudi [9] y la predicción efectiva correspondiente a la fórmula (37). Esta misma figura, pero en un contexto elástico, aparece en [10] como la figura 4 [p. 490].



**Figura 3. “Abanico” de curvas efectivas reproducidas a partir de la fórmula (38), superiormente limitado por la curva correspondiente a fibras infinitamente conductoras (40) e inferiormente por aquella proporcionada por las fibras no conductoras (39)**



Fuente: elaboración propia.

En la figura 3 se ilustra la variación de las fórmulas efectivas (38) para diferentes cocientes  $\sigma_2/\sigma_1 = 0.9, 6, 20, 120$  y su acotamiento inferiormente por el coeficiente efectivo correspondiente a fibras porosas (39) y superiormente por el generado a partir de (40) para fibras súper conductoras.

La propuesta de solución (20-21) aparece en [11] para el estudio de la propiedad efectiva antiplana de un compuesto como el de la figura 1 pero con componentes elásticas e isotrópicas.

### 3. Conclusiones

En este trabajo se hallan los coeficientes que caracterizan las propiedades efectivas de la ecuación del calor en medios fibrosos con

contacto perfecto con ayuda del Método de Homogeneización Asintótica.

El problema de homogeneización del caso poroso donde las fibras son vacías puede ser modelado como un problema de frontera libre, ver [1], ya que consiste en hallar directamente los coeficientes  $\hat{A}_{i_2}^0$ , encontrando primero la solución 1-periódica  $N_i^{(1)}(y)$  de los problemas locales:

$$L_{yy}(N_{i_2}^{(1)} + y_{i_2}) = 0, \quad y \in Y_1 \quad (40)$$

$$\frac{\partial}{\partial n}(N_{i_2}^{(1)} + y_{i_2}) = 0, \quad y \in \Gamma. \quad (41)$$

Los casos límites para fibras vacías y superconductoras respectivamente constituyen las cotas de los coeficientes conductivos efectivos y una útil herramienta de control

de los cálculos. Además, es posible comprobar que satisfacen las fórmulas de reciprocidad de Keller [12], es decir, asumiendo las notaciones  $\hat{A}_{11}^0 = \hat{A}_{11}^0(\sigma_1, 0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$  y  $\hat{A}_{11}^\infty = \hat{A}_{11}^\infty(\sigma_1^{-1}, \infty, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ , se cumple  $\hat{A}_{11}^0 \hat{A}_{11}^\infty = 1$ . Este resultado es importante pues, como se verá en [13], permite predecir cotas variacionales para la propiedad efectiva de compuestos lineales con contacto imperfecto.

En el ejemplo estudiado se resuelven analíticamente los problemas locales pero esto solo se logra en casos particulares, por lo que resulta necesario emplear en las aplicaciones métodos numéricos eficientes para su solución (por ejemplo, en contextos más generales: vía elementos finitos [14]-[16]; vía transformada rápida de Fourier [17,18], vía Wavelets [19], entre otros).

## Referencias

- [1] N. Bakhvalov, G. Panasenko, "Homogenization: averaging processes in a periodic media", Dortmund, Boston, London: Kluwer, 1989.
- [2] E. Sánchez-Palencia, "Non homogeneous media and vibration theory", *Lecture Notes in Physics*. Berlin: Springer-Verlag, 1980.
- [3] O.A. Oleinik *et al.*, *Mathematical problems in elasticity and homogenization*. Amsterdam: North-Holland, 1992.
- [4] D. Cioranescu, P. Donato, *An introduction to homogenization*. New York: Oxford University Press Inc., 1999.
- [5] A. Markushevich, *Teoría de las Funciones Analíticas*. Tomo II. Moscú: Editorial Mir, 1970.
- [6] E. I. Grigolyuk, L. A. Fil'shtinskii, *Placas y membranas perforadas*. Moscú: Editorial Nauka, 1970.
- [7] L. V. Kantarovich, V. I. Krilov, *Approximated methods of higher analysis*. 4 ed. New York: Interscience Publishers Inc., 1964.
- [8] O. Bruno, *The effective conductivity of strongly heterogeneous composites*. London: Proc. R. Soc. A pp. 443, 353-381, 1991.
- [9] J. Aboudi, *Mechanics of Composite Materials*. Amsterdam: Elsevier Science Publications B.V, 1991.
- [10] F. J. Sabina, J. Bravo, R. Guinovart, R. Rodríguez, O. C. Valdiviezo, "Overall behavior of two-dimensional periodic composites", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n.º 2, pp. 483-497, 2002.
- [11] B. E. Pobedrya, *Mecánica de materiales compuestos*. Moscú: Universidad Estatal de Moscú, 1984.
- [12] J. B. Keller, "A theorem on the conductivity of a composite médium", *Journal of Mathematical Physics*, vol. 5, pp. 548-549, 1964.
- [13] G. López, J. Bravo, M. E. Cruz, R. Guinovart, R. Rodríguez. "Cotas variacionales para coeficientes efectivos en compuestos con contacto imperfecto", *Revista Visión Electrónica*, n.º 14, 2013.
- [14] H. Berger, S. Kari, U. Gabbert, R. Rodríguez, R. Guinovart, J. A. Otero, J. Bravo. "An analytical and numerical approach

- for calculating effective material coefficient of piezoelectric fiber composites”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 42, pp. 5692-5714, 2005.
- [15] J. L. Gómez, J. Bravo, “Calculation of effective conductivity of 2D and 3D composite materials with anisotropic constituents and different shapes in mathematica”, *Journal Computer Physics Communications*, vol. 179, pp. 275-287, 2008.
- [16] Á. M. León. “Cálculo de propiedades efectivas de compuestos tridimensionales usando el método combinado de Elementos Finitos y Homogeneización Asintótica”, Tesis de Doctorado en Ciencias Matemáticas, Universidad de la Habana, Cuba, 2007.
- [17] R. Brenner. “Computational approach for composite materials with coupled constitutive Laws”, *Z Angew Math Phys*, vol. 61, pp. 916-927, 2010.
- [18] R. Brenner, J. Bravo Castillero. “Response of multiferroic composites inferred from a FFT-based numerical scheme”, *Journal Smart Materials & Structures*, vol. 19, pp. 115004, 2010.
- [19] F. Lebon, R. Rodríguez, J. C. López, J. Bravo, R. Guinovart, R. Mesejo, “A effective properties of nonlinear laminated composites with perfect adhesión”, *Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, n.º1, pp. 174-178, 2006.